Title	位相群の構造に就いて I
Author(s)	近藤, 基吉
Citation	全国紙上数学談話会. 2(5) p.91-p.94
Issue Date	1947-06-10
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75175
rights	
Note	

40. 位相群の構造に就いて　I

近　藤　基　吉

一般の位相群の構造を作用素環論の立場から論じて見度いと思ふ。此處で，先づ問題となる事は位相群Gの作用素に依る表現である。これを考へるために，Gの上の有界複素連續函數の全体からなる集合をC_Gとする．C_Gの要素fに對してノルム$|f|$を

$$|f| = \underset{x \in G}{\mathrm{u.b.}} \ |f(x)|$$

で定義する・すると，

C_Gは複素Banach空間である。

aをGの任意の要素とする時に，C_Gの上の作用素T_aを

$$T_a f(x) = f(ax)$$

で定義する．すると，T_aは有界線状であつて，しかも，$|T_a| = 1$である。

又，$T_a T_b f(x) = T_a f(bx) = f(abx) = T_{ab} f(x)$より$T_a T_b = T_{ab}$が得られ，$T_a = T_b$の時には，$T_a f(x) = T_b \cdot (x)$から，$f(ax) = f(bx)$となる，特に，$x = e$（$e$は$G$の單位要素）とすれば，$f(a) = f(b)$となる．ところで，$a \neq b$であれば，$C_G$ I 要素hを求めて，$h(a) \neq h(b)$の成立する様に出來る．これを證明するために，次の補助定理を與へる．

$\boxed{\text{補助定理}}$　aをGの要素とし，$V(a)$をaの任意の近傍とする時には，Gの上の有界連續函数$f(x)$を求めて，$f(a) = 0$，$x \bar{\in} V(a)$の時に，$f(x) = 1$である様に出來る。

此補助定理に依つて$a \neq b$の時には，C_Gの要素hを求めて，$h(a) \neq h(e)$の成立する様に出來る．これは$T_a = T_b$に矛盾する．夫故に，$a = b$である．從つて，$T_x \, (x \in G)$の集合をV_GとすればこれはGと代數的に同型である．

此處で，補助定理を證明して置から．先づ，$a = e$が成立するとする．今，Gの部分集合$W(2^n)$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$を次の樣に定める．

(1) $\overline{W}(2^{-2})$ は V に含まれる e の近傍である

(2) $\{\overline{W}(2^{-n})\}^2 \leqq \overline{W}(2^{-n+1})$ $(n>1)$. $\{\overline{W}(2^{-1})\} \leqq V$

次に. $r=\sum_{K=1}^{n} 2^{-\lambda_K}$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\cdots < \lambda_n$; λ_K は自然数)に対して $\overline{W}(r)=\overline{W}(2^{-\lambda_1})\overline{W}(2^{-\lambda_2})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\lambda_n})$

と置く. すると. $r<\rho$ の時に $\overline{W}(r) \leqq \overline{W}(\rho)^2$ である. 何となれば. $r=\sum_{K=1}^{n} 2^{-\lambda_K}$, $\rho=\sum_{K=1}^{n} 2^{-\mu_K}$, $\lambda_K=\mu_K$ $(K=1,2,\cdots,j)$

$\lambda_{j+1} > \mu_{j+1}$ とする時に

$$\overline{W}(r)=\overline{W}(2^{-\lambda_1})\,\overline{W}(2^{-\lambda_2})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\lambda_j})\,\overline{W}(2^{-\lambda_{j+1}})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\lambda_n})$$

$$\leqq \overline{W}(2^{-\mu_1})\,\overline{W}(2^{-\mu_2})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\mu_j})\,\overline{W}(2^{-\lambda_{j+1}})\,\overline{W}(2^{-\lambda_{j+1}-1})\cdots\cdots$$

$$\overline{W}(2^{-\lambda_{j+1}-n-j+1})$$

$$\leqq \overline{W}(2^{-\mu_1})\,\overline{W}(2^{-\mu_2})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\mu_j})\,\overline{W}(2^{-\mu_{j+1}}) \leqq \overline{W}(\rho)$$

となるからである.

今. G の上の函数 $g(x)$ を次の様に定める. 即ち. $x \in \overline{W}(2^{-n})$ $(n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$ の時には. $g(x)=0$ と置き. $x \in \overline{W}(r)$ を満す有理数 r の存在する時には, 此様な r の上端を $g(x)$ とする. すると. $0 \leqq g(x) \leqq 1$ が得られ. $g(e)=0$ で. しかも $x \in G-V(e)$ の時には $g(x)=1$ である. ところで. $g(x)$ は又 G に於いて連続である. 何となれば. x_0 を G の任意の要素とする時に x_0 に於けるる $g(x)$ の上端及び下端を夫々 M, m とする. すると. $m \leqq g(x_0) \leqq M$ であるが. 正数 ε に対して $g(x_0)<r<g(x_0)+\varepsilon$ を満す有理数 r を取れば. $x_0 \in \overline{W}(r)$ が成立ち. $\overline{W}(r)$ は開集合である. 又. $r<m$ を満す様な $\overline{W}(r)$ の和を V とすれば. V は開集合であって. しかも. x_0 は V の境界に属する. 従って. $V\overline{W}(2^{-n})$ は常に x_0 を含む. 故に. V の要素 x を求めて $x_0 \in x\overline{W}(2^{-n})$ の成立する様に出来る. ところで. $x \in \overline{W}(r)$. $r=\sum_{K=1}^{m} 2^{-\lambda_K}$ $\lambda_K>n$ $(K>j)$ とすれば

$$r+2^{-n} < \sum_{K=1}^{j} 2^{-\lambda_K}+2^{-n}+2^{-n} < r+2^{-n+1}$$

より

$$x_0 \in \overline{W}(r)\,\overline{W}(2^{-n}) \leqq \overline{W}\Big(\sum_{K=1}^{j} 2^{-\lambda_K}\Big)\overline{W}(2^{-K})\overline{W}(2^{-n})$$

$$\leqq \overline{W}\Big(\sum_{K=1}^{j} 2^{-\lambda_K}+2^{-n}\Big)\overline{W}(2^{-n}) \leqq \overline{W}\Big(\sum_{K=1}^{j} 2^{-\lambda_K}+2^{-n+1}\Big)$$

が得られ．$m \leqq g(x_0) \leqq r+2^{-n+1} \leqq m+2^{-n+1}$．即ち．
$0 \leqq g(x_0)-m \leqq 2^{-n+1}$ である．n は任意の自然数であるから．
$g(x_0)=m$ となり．$M=m$ である．夫故に．$g(x)$ は x_0 に於いて連結であつて．従つて．これは又 G に於いて連結である。即ち．
$g(x)$ は与へられた條件を滿す．

次に．$a \neq e$ の時を考へる．e の近傍 $V(e)$ を求めて $aV(e)$．$\leqq V(a)$ の成立する様にする．其処で．G の上の連結函数 $g(x)$ を求めて．$0 \leqq g(x) \leqq 1$，$g(e)=0$，$x \in G-V(e)$ の時には．
$g(x)=1$ である様に出来る．今．$f(x)=g(a^{-1}x)$ とすれば
$f(a)=g(a^{-1}a)=g(e)=0$ であつて．$x \in V(a)$ の時には．
$a^{-1}x \in V(e)$ であるから．$1=g(a^{-1}x)=f(x)$ となる．故に
$f(x)$ は与へられた條件を滿し．補助定理の證明は完了する．

今 VG の位相を定義するために C_G の上の $\boxed{\text{全作用素環}}$ R_G — C_G の上の有界線状作用素の全体からなる環 — を取り．R_G に次の様な位相を与へる．R_G の任意の要素 A と C_G の要素 f_K $(K=1,2,\cdots,n)$ と G の要素 x_K $(K=1,2,\cdots,n)$ と正数 ε とに対して．

$$|(A-X)f_K(x_K)|<\varepsilon \quad (K=1,2,\cdots,n)$$

を滿す R_G の要素 X の集合を $\mathfrak{U}(A;f_1,f_2,\cdots,f_n:x_1,x_2,\cdots\cdots x_n:\varepsilon)$ で示し．A の $\boxed{\text{準弱近傍}}$ と名付ける．R_G は此近傍系に関して位相空間を作るが．これを R_G の $\boxed{\text{準弱位相}}$ と名付ける．

ところで．此位相に関して U_G は G と位相同型である．何となれば G の要素 g に U_G の要素 T_g を対応せしめる代数的同型寫像 φ を取り．G の要素 g_0 と T_{g_0} の準弱近傍 $\mathfrak{U}(T_{g_0};f_1.f_2,\cdots.f_n;x_1.x_2,$
$x_n;\varepsilon)$ とを与へる．今 $|(T_{g_0}-T_g)f_n(x_K)|<\varepsilon$．即ち．$|f_K(g_0x_K)-f_K(gx_K)|<\varepsilon$ を滿す g_{xK} の集合を U_K とすれば．これは G の開部分集合であつて．$g_0x_K \in U_K$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ である．これより．$g_0 \in U_Kx_K^{-1}$ が得られ．従つて．$V(g_0) \leqq U_Kx_K^{-1}$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ を滿す g_0 の近傍 $V(g_0)$ が存在する．g を $V(g_0)$ の要素とすれば $gx_K \in U_K$ $(K=1.2,\cdots\cdots,n)$ が得られ

$|(T_{g_0}-T_g)f_K(x_K)|<\varepsilon$ $(K=1,2,\cdots,n)$ である．夫故に．g は $\mathcal{U}(T_{g_0};f_1,f_2,\cdots,f_n;x_1,x_2,\cdots,x_n:2)$ に属し．従って．φ は g_0 に於いて連続である．これより φ の連続性が得られる．

次に．T_{g_0} を U_G の任意の要素とし U を g_0 の任意の近傍とする時に．e の近傍 V を求めて $Vg_0\leqq U$ の成立する様に出来る．ところで．補助定理に依つて C_G の要素 f を求めて $f(e)=0$，$g\in G-V$ の時に．$f(g)=1$ の成立する様に出来る．今．T_{g_0} の準弱近傍 $\mathcal{U}(T_{g_0};f;g_0^{-1};1)$ を取り．此近傍に属する任意の要素 T_g を取る すると $|(T_{g_0}-T_g)f(g_0^{-1})|<1$ であるから．$|(f(e)-f(gg_0^{-1})|<1$ が得られ．$|f(gg_0^{-1})|<1$ である．夫故に $gg_0^{-1}\in V$ が得られ．$g\in Vg_0\leqq U$ である．従つて φ^{-1} は T_{g_0} に於いて連続であつて これより φ^{-1} の連続性が得られる

夫故に．φ は G を U_G に写す位相同型写像である．従つて．以上の結果を綜合して次の定理が得られる．

定理 1 G を位相群とし．C_G を G の上の有界連続函数からなる *Banach* 空間とする時には C_G の上の有界線状作用素 $T_g(g\in G)$ の集合 U_G は 準弱位相に関して G と位相同型である．

此定理より直に次の系が得られる

系 G を緊密位相群とし．C_G を G の上の連続函数からなる Banach 空間とする時には C_G の上の有界線状作用素 $T_g(g\in G)$ の集合 U_G は弱位相に関して G と位相同型である．

1947.3.16